Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index.

Von

P. Debye in München.

§ 1.

Vorbemerkungen.

In der ausgedehnten Literatur der Zylinderfunktionen findet man fast ausschließlich zwei Arten von Reihenentwicklungen, die übrigens der Natur der für diese Funktionen geltenden Differentialgleichung — wir schreiben sie

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u = 0 \text{ —}$$

am unmittelbarsten angepaßt sind. Bei der einen Art geht man vom singulären Punkt $x = 0$ aus, dieselben schreiten nach positiven Potenzen von x fort und sind in der ganzen Ebene konvergent. Bei der zweiten Art bildet der wesentlich singuläre Punkt $x = \infty$ den Ausgangspunkt, die betreffenden von Hankel am eingehendsten untersuchten Reihen schreiten nach negativen Potenzen von x fort und sind semikonvergent im Sinne Poincarés. Während die erste Art der Entwicklung nur für kleine Werte von x zur wirklichen numerischen Rechnung praktisch brauchbar ist, sollen die Hankelschen Entwicklungen dasselbe leisten für den Fall sehr großer Werte des Arguments. Indessen sieht man aus den betreffenden Formeln sofort, daß letzteres nur zutrifft, solange der Index α im Vergleich mit dem Argumente x eine kleine Zahl ist, ein Umstand, der ihrer Verwertung bei allen denjenigen optischen Problemen eine Grenze steckt, bei denen die Abmessungen der vom Lichte getroffenen Körper groß gegenüber der Wellenlänge sind. Ähnliches gilt ganz allgemein bei kleiner Wellenlänge, nicht nur im Falle von Zylinder- oder Kugel-Symmetrie; die dann auftretenden Schwierigkeiten sind in analoger Weise zu überwinden. Handelt es sich z. B. um die Berechnung des elektromagnetischen Feldes um einen von einer ebenen einfallenden Welle getroffenen Zylinder, so erhält man für eine Komponente des elektrischen Feldes ohne Mühe eine Darstellung, die fortschreitet nach Zylinderfunktionen (oder komplizierteren Komplexen solcher Funktionen), deren Argument der großen Zahl: Zylinderradius durch Wellenlänge proportional ist und deren Index alle Werte von Null bis ∞ durchläuft. Zu dem Werte dieser Reihe tragen auch noch diejenigen Glieder wesentlich bei, für die α mit x vergleichbar wird, in welchem Falle die Hankelschen Entwicklungen versagen. Es wird deshalb im folgenden unsre Aufgabe sein, *solche Entwicklungen anzugeben, welche die Zylinderfunktionen asymptotisch ersetzen können für große Werte des Arguments bei unbeschränkt veränderlichen Werten des Index.* Dabei wollen wir uns auf den einfachsten Fall beschränken, daß sowohl α wie x reell sind. Die Ausdehnung auf komplexe Werte von α und x, die übrigens nach demselben Verfahren gemacht wird, werde ich gelegentlich an anderer Stelle mitteilen. Wie die betreffenden Formeln zu benutzen sind, habe ich inzwischen bei der Berechnung des Lichtdrucks auf Kugeln in meiner Münchener Dissertation gezeigt, während die Anwendung auf die Theorie der Beugung in einem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Cöln angedeutet wurde.*) Es sei übrigens bemerkt, daß Lord Rayleigh**) schon darauf hinwies, daß es für die Lösung der optischen Probleme bei Kugeln und Zylindern notwendig sei, näherungsweise Darstellungen der Zylinderfunktionen der oben definierten Art zu kennen. Wir wollen jetzt im folgenden zeigen, wie man naturgemäß auf solche Darstellungen geführt wird, wenn man für die Zylinderfunktionen die auf komplexem Wege genommenen Integraldarstellungen benutzt. Der Weg der Ableitung an sich ist nicht neu, das Prinzip der Methode wird, wie ich nachträglich bemerkte, klar ausgesprochen in einem von H. A. Schwarz ausgearbeiteten Fragment des Riemannschen Nachlasses:***) „Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita.“ Das Verfahren wird in dieser Arbeit von Riemann dazu benutzt, den Grenzwert der hypergeometrischen Reihe

$$H(a+n,\ b+n,\ c+2n,\ x)$$

zu bestimmen für sehr große Werte von n. Mittels derselben Methode bestimmen Graf und Gubler†) in ihrem Buche den Grenzwert

$$\lim_{a=\infty} J_a(ax)$$

---

*) Phys. Ztschr. 9, S. 775, 1908 und Verhdl. d. Deutschen physik. Ges. 10, S. 741, 1908.

**) Note on Bessel's Functions, Phil. Mag. 44, S. 337, 1872.

***) B. Riemann, Ges. math. Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, Leipzig 1876, S. 400.

†) J. H. Graf und E. Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Bern 1898, Heft 1, S. 96.